Typy homotopii w geometrii algebraicznej

Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich
w stulecie Polskiego Towarzystwa Matematycznego

4 września 2019

Piotr Achinger

Instytut Matematyczny PAN

I

Motywacja:
geometria zespolona

X – zwarta rozmaitość zespolona

Pytanie

Jakie są naturalne ograniczenia na topologię X?

- $\dim X = 2d$
- dualność Poincaré: $H^n(X, \mathbf{Q}) \simeq H^{2d-n}(X, \mathbf{Q})^\vee$
- klasy charakterystyczne (Wu, Massey, Borel–Serre)

Przykład — struktury zespolone na sferach

Czy sfera S^{2d} dopuszcza strukturę zespoloną?

- S^2 **tak**
- S^4 **nie**, S^{2d} ($d > 3$) **nie** (korzystając z klas charakterystycznych)
- S^6 **problem otwarty**

X – rozmaitość rzutowa (∃ holomorficzne $X \hookrightarrow \mathbf{C}P^N$)
lub ogólniej kählerowska (∃ kompatybilna forma symplektyczna ω)

- $H^{2i}(X, \mathbf{Q}) \neq 0$ dla $i \leq d$ (bo $\int \omega^d \neq 0$) $\Rightarrow$ S^6 odpada
- rozkład (struktura) Hodge'a:

$$H^n(X, \mathbf{Q}) \otimes \mathbf{C} = H^n(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega_X^p),$$

  gdzie $\mathrm{id} \otimes (z \mapsto \bar{z})$ zamienia $(p, q) \leftrightarrow (q, p)$

  $\Rightarrow$ $\dim H^n(X, \mathbf{Q})$ parzyste gdy n nieparzyste

Przykład — Powierzchnia Hopfa

$$X = (\mathbf{C}^2 \setminus (0,0))/q^{\mathbf{Z}}, \quad 0 < |q| < 1$$

$X \overset{C^\infty}{\simeq} S^1 \times S^3 \;\Rightarrow\; \dim H^1 = 1 \;\Rightarrow\;$ nie jest kählerowska

- ciężkie tw. Lefschetza, dwuliniowe zależności Riemanna
- ograniczenia na $\pi_1(X) \rightsquigarrow$ grupy kählerowskie

Slogan: «The Unreasonable Effectiveness of Algebraic Topology in Algebraic Geometry »

Niezmienniki topologiczne ($H^n(X), \pi_1(X), \ldots$) mają **dodatkową strukturę** (str. Hodge'a, działanie Galois), która koduje geometryczne informacje.

Przykłady:

- twierdzenia typu Torelliego:
  często $H^*(X)$ wraz ze strukturą Hodge'a „pamięta" X
- hipotezy Hodge'a i Tate'a: $H^*(X)$ „pamięta" cykle algebraiczne
- program Langlandsa (kohomologie rozmaitości Shimury)

Cel wykładu

Pokazać, jak można stosować metody topologii algebraicznej w **dwu kontekstach**:

(a) rozmaitości algebraicznych nad dowolnym ciałem

(b) niearchimedesowych rozmaitości zespolonych

Motywacja:

(a) arytmetyka, teoria liczb

(b) topologia degeneracji, matematyczne aspekty teorii strun

Pytanie

Czym jest typ homotopii X w kontekstach (a) i (b)?

II

Etalna teoria homotopii

X – rozmaitość algebraiczna nad ciałem k $\qquad$ $(k = \mathbf{Q}, \mathbf{F}_p, \mathbf{Q}_p, \mathbf{R}, \ldots)$

Jeśli $k \subseteq \mathbf{C}$, możemy stosować metody topologii algebraicznej do $X(\mathbf{C})$

Problemy z tym podejściem:

(1) typ homotopii $X(\mathbf{C})$ może zależeć od zanurzenia $k \hookrightarrow \mathbf{C}$!

(2) brak działania grupy Galois!

(3) co z ciałami, które nie zanurzają się w $\mathbf{C}$, np. $k \supseteq \mathbf{F}_p$?

Potrzeba algebraicznie zdefiniowanego typu homotopii X!

$\rightsquigarrow$ etalny typ homotopii (Artin–Mazur)

Konstrukcja etalnego typu homotopii $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)$: INTUICJA:

(1) pojęcie pokrycia etalnego $Y \to X$ $\qquad Y = \coprod U_i,\ X = \bigcup U_i$

(2) nerw Čecha: $Y_\bullet \to X$, $\quad Y_n = \underbrace{Y \times_X \cdots \times_X Y}_{n+1}$ $\qquad Y_n = \coprod U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$

(3) $\pi_0(Y_\bullet)$ zbiór symplicjalny $\qquad \{(i_0, \ldots, i_n) \,|\, U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\}$

Etalny typ homotopii: $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X) :=$ „granica” $\pi_0(Y_\bullet)$ po wszystkich pokryciach etalnych $Y \to X$ (pro-obiekt w kategorii homotopii)

Własności etalnego typu homotopii $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)$:

- $H^*(\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq H^*_{\mathrm{et}}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ kohomologie etale
- $\pi_1(\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)) = \pi_1^{\mathrm{et}}(X)$ etalna grupa podstawowa
- gdy $k = \mathbf{C}$, $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)$ to proskończone uzupełnienie $X(\mathbf{C})$
- gdy $k \supseteq \mathbf{F}_p$, $\Pi_\infty^{\mathrm{et}}(X)$ jest dużo bardziej **tajemnicze**...

Patologie etalnej homotopii w dodatniej charakterystyce ($k \supseteq \mathbf{F}_p$)

(1) Prosta afiniczna $\mathbf{A}^1_k$ nie jest jednospójna ($\pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^1_k) \neq 1$)!
Przykład: nakrycie Artina–Schreiera:

$$f(x) = x - x^p \colon \mathbf{A}^1_k \longrightarrow \mathbf{A}^1_k, \quad f'(x) = 1 - px^{p-1} = 1$$

(2) $\pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^1_k)$ nie jest topologicznie skończenie generowana oraz

$$\pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^2_k) \neq \pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^1_k) \times \pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^1_k)$$

(3) (Raynaud 1994) Każda grupa skończona G bez nietrywialnych ilorazów rzędu niepodzielnego przez p jest ilorazem $\pi_1^{\text{et}}(\mathbf{A}^1_k)$!

(4) (Holschbach–Schmidt–Stix 2013) Nie istnieją „ściągalne” rozmaitości nad k inne niż punkt!

Twierdzenie (A. 2016)

Etalny typ homotopii dowolnej rozmaitości afinicznej nad ciałem charakterystyki dodatniej jest przestrzenią $K(\pi, 1)$.

Przestrzeń $K(\pi, 1)$ to przestrzeń, której grupy homotopii $\pi_i(X) = 0$ dla $i > 1$. Jej typ homotopii jest jednoznacznie wyznaczony przez $\pi_1(X)$.

Slogan: zrozumieć typ homotopii X to to samo, co zrozumieć $\pi_1^{\mathrm{et}}(X)$

Problem otwarty

Niech k będzie ciałem doskonałym charakterystyki dodatniej. Czy grupa $\pi_1(\mathbf{A}_k^1)$ wyznacza jednoznacznie k?

III

Niearchimedesowa geometria zespolona

$\mathbf{C}(\!(t)\!) = \{\sum_{n \gg -\infty} a_n t^n \mid a_n \in \mathbf{C}\}$ ciało formalnych szeregów Laurenta

$|f| = 2^{-\min\{n \mid a_n \neq 0\}}$ norma niearchimedesowa

„Definicja” rozmaitości niearchimedesowej

(1) polidysk $\mathbf{B}^n$, na którym „funkcje holomorficzne” to algebra Tate'a:

$$T_n = \mathbf{C}(\!(t)\!)\{x_1, \ldots, x_n\} = \left\{\sum b_{\mathbf{i}} \mathbf{x}^{\mathbf{i}} \in \mathbf{C}(\!(t)\!)[\![x_1, \ldots, x_n]\!] \mid b_{\mathbf{i}} \to 0\right\}$$

(2) przestrzeń affinoidalna $V = \{f_1 = \ldots = f_r = 0\} \subseteq \mathbf{B}^n$, gdzie $f_i \in T_n$

(3) rozmaitość niearchimedesowa X nad $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ powstaje przez (umiejętne) klejenie przestrzeni affinoidalnych

Jeżeli zamienimy powyżej $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ na $\mathbf{C}[\![t]\!]$, dostaniemy pojęcie schematu formalnego $\mathfrak{X}$ nad $\mathbf{C}[\![t]\!]$. Jego „włókno ogólne” $X = \mathfrak{X} \otimes \mathbf{C}(\!(t)\!)$ jest rozmaitością niearchimedesową. Taki $\mathfrak{X}$ nazwiemy modelem X.

X – zwarta gładka rozmaitość niearchimedesowa nad $\mathbf{C}(\!(t)\!)$

Pytanie

Czy można X przypisać naturalny typ homotopii rozmaitości topologicznej?

- motywacja (D. Treumann): symetria lustrzana, topologiczna zespolona K-teoria par lustrzanych

Twierdzenie (A.–Talpo 2019)

Istnieje funktor Ψ z kategorii gładkich rozmaitości niearchimedesowych nad $\mathbf{C}(\!(t)\!)$ do kategorii homotopii, o następujących własnościach:

(a) $\Psi(X)$ jest rozmaitością topologiczną

(b) istnieje naturalny operator monodromii $T\colon \Psi(X) \to \Psi(X)$

(c) $\dim H^*(\Psi(X), \mathbf{Q}) = \dim H^*_{\mathrm{dR}}(X)$

(d) ...

Konstrukcja typu homotopii $\Psi(X)$:

(1) korzystając z rozwiązania osobliwości, znaleźć model $\mathfrak{X}$ o możliwie dobrych osobliwościach („model semistabilny”)

(2) wyposażamy zdegenerowane włókno szczególne $\mathfrak{X}_0$ w naturalną „strukturę logarytmiczną”, która pozwala udawać, że jest gładkie

(3) bierzemy „przestrzeń Kato–Nakayamy”

$$\Psi(X) := (\mathfrak{X}_0)_{\log},$$

która „wkleja z powrotem cykle znikające”

$$\begin{tikzcd}
\text{włókno ogólne} & \text{model} & \text{włókno szczególne} & \text{przestrzeń Kato–Nakayamy} & \\
X \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathfrak{X} \arrow[d, dash] & \mathfrak{X}_0 \arrow[l] \arrow[d, dash] & (\mathfrak{X}_0)_{\log} \arrow[l] \arrow[d, dash] \arrow[r, equal] & \Psi(X) \\
\mathbf{C}(\!(t)\!) & \mathbf{C}[\![t]\!] & \mathbf{C} & S^1 &
\end{tikzcd}$$

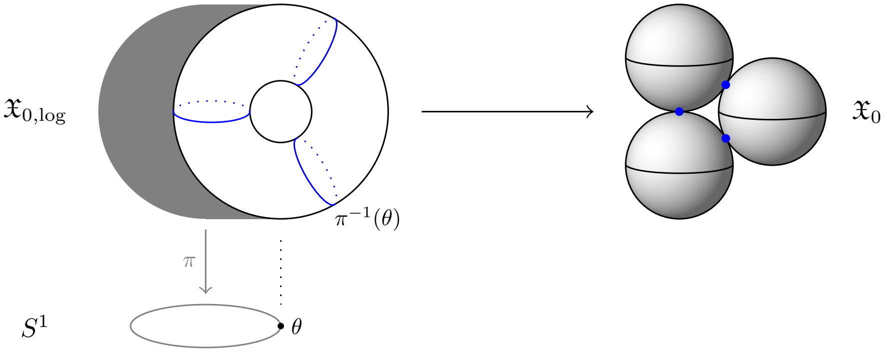
Niezależność od wyboru modelu $\mathfrak{X}$: słabe twierdzenie o faktoryzacji (Włodarczyk) w wersji Abramovicha i Temkina + bezpośrednia analiza

Przykład. Krzywa eliptyczna Dworka

$$X = \{\ t(X^3 + Y^3 + Z^3) = XYZ\ \} \subseteq \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}((t))}$$

$$\mathfrak{X} = \{t(X^3 + Y^3 + Z^3) = XYZ\ \} \subseteq \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}[[t]]}$$

$$\mathfrak{X}_0 = \{\ 0 = XYZ\ \} \subseteq \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$$



X – zwarta gładka rozmaitość niearchimedesowa nad $\mathbf{C}(\!(t)\!)$

PYTANIE

Jaki jest niearchimedesowy odpowiednik warunku kählerowskości?

- Możliwa odpowiedź (Li 2018): X ma rzutową redukcję, tj. posiada model $\mathfrak{X}$ taki, że $\mathfrak{X}_0$ jest rzutowe

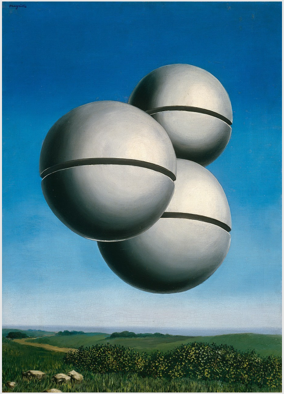
Hipoteza (HANSEN–LI 2018)

Jeżeli X ma rzutową redukcję, to spełnia symetrię Hodge'a:

$$\dim H^p(X, \Omega_X^q) = \dim H^q(X, \Omega_X^p),$$

w szczególności $\dim H^n(\Psi(X), \mathbf{Q})$ jest parzyste dla n nieparzystego.

Przykład. Niearchimedesowa powierzchnia Hopfa: $\Psi(X) = S^1 \times S^3$, więc nie powinna mieć rzutowej redukcji (i nie ma).



LITERATURA

[1] P. Achinger, *Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces*, Invent. Math. 210 (2017), no. 2, 453–499.

[2] P. Achinger i M. Talpo *Betti realization of varieties defined by formal Laurent series*, w przygotowaniu.

[3] M. Artin i B. Mazur, *Étale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, 1969.

[4] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar*, Invent. Math. 116 (1994), no. 1-3, 425–462.

René Magritte *Głos przestrzeni* (*La voix des airs*), 1931, olej na płótnie, źródło: `https://www.guggenheim.org/artwork/2593`